Ανεξαρτησία ενδεχομένων

1) Ρίχνουμε ένα ζάρι δύο φορές. Να βρείτε την πιθανότητα του ενδεχομένου να φέρουμε 6 στην $1^η$ ρίψη και περιττό στη $2^η$ ρίψη.

ΛΥΣΗ

Έστω τα ενδεχόμενα:

$$A = \{1^η \text{ ρίψη το } 6\} \quad \text{και} \quad B = \{2^η \text{ ρίψη περιττός}\}$$

Προφανώς τα A και B ανεξάρτητα ενδεχόμενα.

Άρα, $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{6} \cdot \frac{3}{6} = \frac{1}{12}$

2) Ένα κουτί περιέχει 6 κόκκινες και 8 μαύρες μπάλες. Παίρνουμε τυχαίως μια μπάλα μέσα από το κουτί, σημειώνουμε το χρώμα της και την επανατοποθετούμε στο κουτί. Στη συνέχεια παίρνουμε μια δεύτερη μπάλα. Να βρείτε την πιθανότητα η πρώτη μπάλα να είναι μαύρη και η δεύτερη κόκκινη.

ΛΥΣΗ

Προφανώς και πάλι τα ενδεχόμενα

$A = \{1^ο \text{ τράβηγμα μαύρη}\}$ και $B = \{2^ο \text{ τράβηγμα κόκκινη}\}$

είναι ανεξάρτητα μεταξύ τους.

Άρα, $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = \frac{}{14} \cdot \frac{6}{14} = \frac{12}{49}$

3) Έστω τα ενδεχόμενα A και B ανεξάρτητα και $P(A \cap B) = \frac{1}{5}$, $P(A) = \frac{1}{4}$. Να βρείτε τις πιθανότητες: $P(B)$ και $P(A \cup B)$

ΛΥΣΗ

τα A και B ανεξάρτητα $\Rightarrow P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{1}{5} = \frac{1}{4} \cdot P(B) \Rightarrow P(B) = \frac{4}{5}$.

Άρα, $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{4} + \frac{4}{5} - \frac{1}{5} = \frac{17}{20}$

4) Για 2 ενδεχόμενα A και B $\in \mathcal{A}$ στον χώρο πιθανοτήτων $(S, \mathcal{A}, P)$ ισχύουν:

$P(A) = \frac{1}{3}$, $P(A|B) = \frac{2}{3}$ και $P(B|A) = \frac{1}{2}$

i) Να εξετάσετε εάν τα A, B ανεξάρτητα

ii) " " " " " " ξένα μεταξύ τους

iii) Να υπολογίσετε την πιθανότητα $P(B)$.

<u>ΛΥΣΗ</u>

i) Παρατηρούμε ότι $P(A) \neq P(A|B)$
άρα από τον $1^{ο}$ ορισμό των ανεξάρτητων ενδεχομένων τα A και B είναι εξαρτημένα.

ii) Έστω ότι τα A, B ξένα μεταξύ τους

Άρα, $A \cap B = \emptyset \Rightarrow P(A\cap B) = 0$

Αλλά, $P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{0}{P(B)} \neq \frac{2}{3}$

άρα Άτοπο.

Συνεπώς, τα A, B <u>δεν</u> είναι ξένα μεταξύ τους

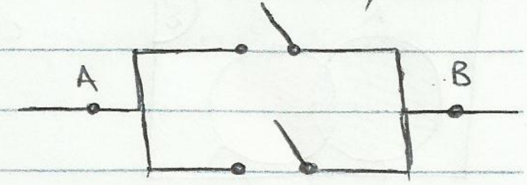
iii) $P(A\cap B) = P(A|B)\cdot P(B)$
και
$P(A\cap B) = P(B|A)\cdot P(A)$

$\Rightarrow P(A|B)\cdot P(B) = P(B|A)\cdot P(A) \overset{(*)}{\Rightarrow}$

$\overset{(*)}{\Rightarrow} \frac{2}{3}\cdot P(B) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} \Rightarrow P(B) = \frac{1}{4}$.

5) Στο διπλανό κύκλωμα "εν παραλλήλω" η πιθανότητα κάθε διακόπτης να είναι κλειστός (δηλ. να επιτρέπει τη διέλευση ρεύματος) είναι 0.8. Οι διακόπτες λειτουργούν ανεξάρτητα ο ένας από τον άλλον. Να βρείτε την πιθανότητα του ενδεχομένου να διέρχεται ρεύμα από το A στο B.

(ΚΥΚΛΩΜΑ)



ΛΥΣΗ

Για να διέρχεται ρεύμα από το A στο B σημείο πρέπει τουλάχιστον ένας από τους δυο διακόπτες να είναι κλειστός (ή ο ένας ή ο άλλος ή και οι δύο). Οι διακόπτες λειτουργούν ανεξάρτητα ο ένας από τον άλλον, άρα η πιθανότητα να είναι και οι δυο κλειστοί είναι ίση με (εάν Γ_1 το ενδεχόμενο ο $1^{ος}$ διακόπτης κλειστός και Γ_2 το ενδεχόμενο ο $2^{ος}$ διακόπτης κλειστός): $P(\Gamma_1 \cap \Gamma_2) = P(\Gamma_1) \cdot P(\Gamma_2) =$
$= 0.8 \cdot 0.8 = 0.64$.

Η πιθανότητα όπου ψάχνουμε είναι η:

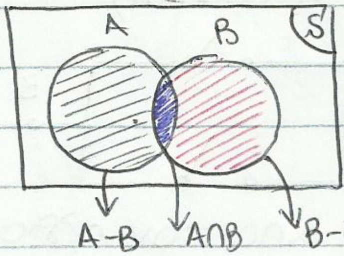
$P(\Gamma_1 \cup \Gamma_2) = P(\Gamma_1) + P(\Gamma_2) - P(\Gamma_1 \cap \Gamma_2) = 0.8 + 0.8 - 0.64 =$
$= 0.96$

Άρα, 96% να περνάει ρεύμα από τον $A \rightarrow B$.

6) Η πιθανότητα να πάθει βλάβη μέσα στον $1^{ο}$ χρόνο λειτουργίας της μια μηχανή ορισμένου τύπου είναι 10%. Αν μια βιομηχανία έχει δυο μηχανές τέτοιου είδους, οι οποίες αρχίζουν να λειτουργούν ταυτόχρονα και ανεξάρτητα η μια από την άλλη, να βρείτε την πιθανότητα η μία μόνο να πάθει βλάβη μέσα στον $1^{ο}$ χρόνο λειτουργίας τους.

ΛΥΣΗ

$A = \{$βλάβη η $1^{η}$ μηχανή$\}$ και $B = \{$βλάβη η $2^{η}$ μηχανή$\}$



Το ενδεχόμενο να πάθει βλάβη η 1η μηχανή είναι αν το δούμε σε σχέση συνόλων:

$$[(A-B)\cup(B-A)]$$

Ασυμβίβαστα.

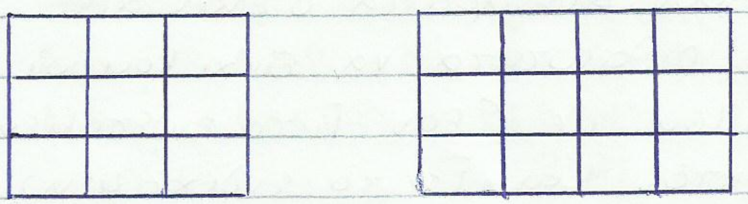
Άρα, $P\big((A-B)\cup(B-A)\big) = P(A-B)+P(B-A)-P\big((A-B)\cap(B-A)\big) =$

$= P(A)-P(A\cap B)+P(B)-P(A\cap B)-0 =$

$= P(A)+P(B)-2P(A\cap B) =$

$= \frac{10}{100}+\frac{10}{100}-2\cdot\frac{10}{100}\cdot\frac{10}{100} = \frac{18}{100} \sim 18\%$

7) Δύο κτήματα έχουν χωριστεί σε 9 και 12 ίσα οικόπεδα



Επιλέγουμε τυχαίως και ανεξάρτητα το ένα από το άλλο ένα οικόπεδο από κάθε κτήμα:

i) Ποια η πιθανότητα και τα 2 οικόπεδα να είναι γωνιακά;

ii) " " " ένα τουλάχιστον από τα οικόπεδα να είναι γωνιακό

iii) Ποια η πιθανότητα κανένα από τα δύο να είναι γωνιακό;

ΛΥΣΗ

Έστω $A=\{$το οικόπεδο από το 1ο κτήμα να 'ναι γωνιακό$\}$

και $B=\{$το οικόπεδο από το 2ο κτήμα να 'ναι γωνιακό$\}$

i) $P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)=\frac{4}{9}\cdot\frac{4}{12}=\frac{4}{27}$

ii) $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=\frac{4}{9}+\frac{4}{12}-\frac{4}{27}=\frac{17}{27}$

iii) $P((A\cup B)')=1-P(A\cup B)=1-\frac{17}{27}=\frac{10}{27}$